数理解析研究所講究録
第 1963 巻 2015 年 183-191

AN ELEMENTARY PROOF OF DEMARR'S THEOREM

横浜創学館高等学校　窪田 理英子 (Rieko Kubota)
Yokohama So-gakukan High School
高橋非線形解析研究所　竹内 幸雄 (Yukio Takeuchi)
Takahashi Institute for Nonlinear Analysis

ABSTRACT. In this note, we present an elementary proof of DeMarr's well-known theorem. In our proof, we only need the Banach contraction mapping principle and a little knowledge of a compact set in a Banach space.

1. INTRODUCTION

In 1963, DeMarr proved the following well-known theorem.

Theorem 1 (DeMarr, 1963, [5]). *Let D be a compact convex subset of a Banach space E. Let $\{T_j\}_{j\in J}$ be a family of commuting nonexpansive self-mappings on D. Then, there is a common fixed point of $\{T_j\}_{j\in J}$, that is, $\cap_{j\in J}F(T_j)\neq\emptyset$.*

After DeMarr, some excellent articles were appeared in this direction; for example, see Bruck [4] and therein. By using Kirk's fixed point theorem [10] and Bruck's fixed point theorem [4], we can have Theorem 1 again. In 1979, Ishikawa [9] proved some interesting facts connected with finite families of commuting nonexpansive mappings in general Banach spaces. In 2005, Suzuki [16] proved a strong convergence theorem to find a common fixed point for an infinite family of commuting nonexpansive mappings in a general Banach space. It is easy to see that Theorem 1 follows from their results. The authors think that DeMarr's proof is excellent and modern. The other works as mentioned above are excellent in theory. Unfortunately, it is not so elementary to read these articles for under graduate students. Then, motivated by these works, we give an elementary and simple proof of Theorem 1 with the hope that they can read it.

2. PRELIMINARIES

In this note, we denote by N the set of positive integers and by N_0 the set of nonnegative integers. For $i,j\in N_0$ satisfying $i\leq j$, $N(i,j)$ denotes the set $\{k\in N_0 : i\leq k\leq j\}$. We define $N(j,i)=\emptyset$ and $\sum_{k=j}^{i}(\cdot)=0$ if $i<j$. We denote by E a real Banach space. For simplicity, we remove "real". Let D be a nonempty subset of a Banach space E. Let T be a self-mapping on D. We denote by $F(T)$ the set of fixed points of T, that is, $F(T)=\{x\in D : Tx=x\}$. T is said to be nonexpansive if $\|Tx-Ty\|\leq\|x-y\|$ for all $x,y\in D$. T is said to be contractive if there exists $a\in[0,1)$ such that $\|Tx-Ty\|\leq a\|x-y\|$ for all $x,y\in D$. Let $\{T_j\}_{j\in J}$ be a family of nonexpansive self-mappings on D. $\{T_j\}_{j\in J}$ is called commuting if $T_iT_j=T_jT_i$ for $i,j\in J$.

Let D be a compact convex subset of E. Let $\{T_1,\cdots,T_m\}$ be a finite family of commuting nonexpansive self-mappings on D. Let $\{\alpha_n\}$ be a sequence in $(0,1/2]$.

Let $x_1\in D$. For each $n\in N$, let U_n be a mapping defined by

$$\text{(a)}\qquad U_nx=(1-\textstyle\sum_{j=1}^{m}\alpha_n^j)T_1x+\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_n^jT_{j+1}x+\alpha_n^mx_1\quad\text{for } x\in D.$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10.

Key words and phrases. Families of commuting nonexpansive mappings, common fixed point.

Since D is convex, it is obvious that U_n is a self–mapping on D for $n \in N$. We can easily see that each U_n is a contraction. Really, for $n \in N$ and $x, y \in D$, we have

$$\begin{aligned}\|U_n x - U_n y\| &\leq (1 - \textstyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_n^j)\|T_1 x - T_1 y\| + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_n^j \|T_{j+1} x - T_{j+1} y\| \\ &\leq (1 - \textstyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_n^j)\|x - y\| + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_n^j \|x - y\| = (1 - \alpha_n^m)\|x - y\|.\end{aligned}$$

Let $l \in N(1, m-1)$ and assume $w \in \bigcap_{j \in N(1,l)} F(T_j)$. By $T_i T_j = T_j T_i$ for $i, j \in N(1, m)$ and $w \in \bigcap_{j \in N(1,l)} F(T_j)$, we have that, for $j \in N(1, l)$ and $y \in D$,

$$\text{(b)} \qquad \|T_{l+1} w - T_j y\| = \|T_{l+1} T_j w - T_j y\| = \|T_j T_{l+1} w - T_j y\| \leq \|T_{l+1} w - y\|.$$

3. An elementary proof of DeMarr's theorem

Lemma 2. *Let D be a compact convex subset of E. Let $\{T_1, \cdots, T_m\}$ be a finite family of commuting nonexpansive self–mappings on D. Then, $\bigcap_{j \in N(1,m)} F(T_j) \neq \emptyset$.*

Proof. Let $\{\alpha_n\}$ be a sequence in $(0, 1/2]$ satisfying $\lim_n \alpha_n = 0$. Let $x_1 \in D$. For each $n \in N$, let U_n be a mapping defined by (a). By the Banach contraction mapping principle, there is the sequence $\{w_n\}$ such that $U_n w_n = w_n$ for $n \in N$. Since D is compact, $\{w_n\}$ has a subsequence $\{w_{n_k}\}$ which converges to some $w \in D$.

We prove $w \in \bigcap_{j \in N(1,m)} F(T_j)$ by induction. To have the result, we need the following two steps. We fix $k \in N$ arbitrary and set $M = m \sup\{\|x - y\| : x, y \in D\} < \infty$.

Step 1. We show $w \in F(T_1)$. By $U_{n_k} w_{n_k} = w_{n_k}$, it is easy to see that

$$\begin{aligned}\|T_1 w - w_{n_k}\| &= \left\|T_1 w - (1 - \textstyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_{n_k}^j) T_1 w_{n_k} - \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{n_k}^j T_{j+1} w_{n_k} - \alpha_{n_k}^m x_1\right\| \\ &\leq (1 - \textstyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_{n_k}^j)\|T_1 w - T_1 w_{n_k}\| \\ &\qquad + \textstyle\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{n_k}^j \|T_1 w - T_{j+1} w_{n_k}\| + \alpha_{n_k}^m \|T_1 w - x_1\| \\ &\leq \|w - w_{n_k}\| + \alpha_{n_k} \left(\textstyle\sum_{j=1}^{m-1} \|T_1 w - T_{j+1} w_{n_k}\| + \|T_1 w - x_1\|\right) \\ &\leq \|w - w_{n_k}\| + \alpha_{n_k} M, \\ \|T_1 w - w\| &\leq \|T_1 w - w_{n_k}\| + \|w_{n_k} - w\| \leq 2\|w - w_{n_k}\| + \alpha_{n_k} M.\end{aligned}$$

Since $\{w_{n_k}\}$ converges to w and $\lim_k \alpha_{n_k} = 0$, we have $w \in F(T_1)$.

Step 2. Let $l \in N(1, m-1)$ and assume $w \in \bigcap_{j \in N(1,l)} F(T_j)$. Then, we show that $w \in \bigcap_{j \in N(1,l+1)} F(T_j)$. By $U_{n_k} w_{n_k} = w_{n_k}$ and (b), we easily have

$$\begin{aligned}\|T_{l+1} w - w_{n_k}\| &= \left\|T_{l+1} w - (1 - \textstyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_{n_k}^j) T_1 w_{n_k} - \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{n_k}^j T_{j+1} w_{n_k} - \alpha_{n_k}^m x_1\right\| \\ &\leq (1 - \textstyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_{n_k}^j)\|T_{l+1} w - T_1 w_{n_k}\| + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{n_k}^j \|T_{l+1} w - T_{j+1} w_{n_k}\| \\ &\qquad + \alpha_{n_k}^m \|T_{l+1} w - x_1\| \\ &\leq (1 - \textstyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_{n_k}^j)\|T_{l+1} w - w_{n_k}\| + \sum_{j=1}^{l-1} \alpha_{n_k}^j \|T_{l+1} w - w_{n_k}\| \\ &\qquad + \alpha_{n_k}^l \|T_{l+1} w - T_{l+1} w_{n_k}\| \\ &\qquad + \textstyle\sum_{j=l+1}^{m-1} \alpha_{n_k}^j \|T_{l+1} w - T_{j+1} w_{n_k}\| + \alpha_{n_k}^m \|T_{l+1} w - x_1\| \\ &\leq (1 - \textstyle\sum_{j=l}^{m} \alpha_{n_k}^j)\|T_{l+1} w - w_{n_k}\| + \alpha_{n_k}^l \|w - w_{n_k}\| \\ &\qquad + \alpha_{n_k}^{l+1} \left(\textstyle\sum_{j=l+1}^{m-1} \|T_{l+1} w - T_{j+1} w_{n_k}\| + \|T_{l+1} w - w_{n_k}\|\right) \\ &\leq (1 - \alpha_{n_k}^l)\|T_{l+1} w - w_{n_k}\| + \alpha_{n_k}^l \|w - w_{n_k}\| + \alpha_{n_k}^{l+1} M.\end{aligned}$$

By this inequality and $\alpha_{n_k}^l > 0$, we have $\|T_{l+1} w - w_{n_k}\| \leq \|w - w_{n_k}\| + \alpha_{n_k} M$.

Then, it follows that

$$\|T_{l+1}w - w\| \le \|T_{l+1}w - w_{n_k}\| + \|w_{n_k} - w\| \le 2\|w - w_{n_k}\| + \alpha_{n_k}M.$$

Thus, we have $w \in F(T_{l+1})$ and $w \in \cap_{j\in N(1,l+1)}F(T_j)$. □

Proof of Theorem 1. We can easily see that $F(T_j)$ is closed for $j \in J$. Then, $\{F(T_j)\}_{j\in J}$ consists of closed subsets of D. By Lemma 2, $\{F(T_j)\}_{j\in J}$ has the finite intersection property. Thus, from D is compact, it follows that $\cap_{j\in J}F(T_j) \neq \emptyset$. □

Acknowledgments

The authors would like to thank Professor Wataru Takahashi for his direction and encouragement. The authors also thank Professor Hidetoshi Komiya and Professor Tomonari Suzuki for their useful advice.

References

[1] J. B. Baillon, *Quelques aspects de la théorie des points fixes dans les espaces de Banach. I, II.*, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle (1978–1979), Exp. No. 7–8, 45 pp., École Polytech., Palaiseau, 1979 (French).

[2] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54** (1965), 1041–1044.

[3] F. E. Browder, *Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces*, Archs. Ration. Meck. Anal. **24** (1967), 82–90.

[4] R. E. Bruck Jr., *A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **53** (1974), 59-71.

[5] R. DeMarr, *Common fixed points for commuting contraction mappings*, Pacific J. Math. **13** (1963), 1139–1141.

[6] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957–961.

[7] S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974), 147–150.

[8] S. Ishikawa, *Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1976), 65–71.

[9] S. Ishikawa, *Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **80** (1979), 493–501.

[10] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, The American Mathematical Monthly **72** (1965), 1004–1006.

[11] P. K. F. Kuhfittig, *Common fixed points of nonexpansive mappings by iteration*, Pacific Journal of Mathematics, vol. **97** (1981), 137–139.

[12] J. Linhart, *Beiträge zur Fixpunkttheorie nichtexpandierender Operatoren*, Monatsh. Math. **76** (1972), 239–249 (German).

[13] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.

[14] K. Shimoji and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of infinite nonexpansive mappings and applications*, Taiwanese Journal of Mathematics, vol. **5** (2001), 387–404.

[15] T. Suzuki, *Strong convergence theorem to common fixed points of two nonexpansive mappings in general Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **3** (2002), 381–391.

[16] T. Suzuki, *Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces*, Fixed Point Theory and Applications (2005), 103–123.

[17] W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska **51** (1997), 277–292.

[18] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[19] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math. **58** (1992), 486–491.

THE POINT OF VIEW OF AUTHORS

今回の講演では, (可換な) 非拡大写像族の共通不動点を主題とし “ある種の Browder 点列の研究が重要ではないか” という問題提起をした。著者は, 関数解析という分野が Hahn-Banach の定理や分離定理など基本的な部分から選択公理と深い関わりを持つとしても, Zorn's lemma などを使用する議論を, 基礎的な部分にできるだけ閉じ込めておくことが望ましいと思う。Prof. DeMarr 以降, Prof. Kirk の定理を廻るこの分野の歴史は良く知られている。Prof. Kirk の結果や Bruck 先生の不動点定理は Banach 空間の幾何と不動点の関係としては重要であるかもしれない。しかし, 共通不動点をオピアルの性質を持つ空間や一様凸な空間で考察するならばこれらは必要ない。一様ガトー微分可能な空間で可算な族を考える場合も Bruck 先生の定理は不要である。この観点からは Prof. Browder [2] と Prof. Baillon [1] の不動点定理が重要になる。本講演の視点は石川先生の研究から示唆され議論の方向は鈴木先生の研究から導かれた。

本稿では石川先生の結果を解説し関連する歴史的背景にも触れる。石川先生の論文 [9] は難解である, 少なくとも難解に見える。しかし議論の本質は見かけほど複雑ではなく考え方はむしろ素朴に思える。本質を見やすくするために, 写像の数を 2 つに限定して石川先生のアイデアの概要を, 推測ではあるが, 解説する。D を実 Banach 空間 E の compact 凸部分集合とし I を D 上の恒等写像とする。T_1, T_2 を D 上の可換な非拡大自己写像とし $S_i = aT_i + (1-a)I$ $(i = 1, 2)$, $a \in (0, 1)$ とする。このとき S_i は $F(S_i) = F(T_i)$ を満たす D 上の非拡大自己写像である。[8] の主定理は, $x_1 \in D$, $x_{n+1} = S_i x_n$ として生成された点列 $\{x_n\}$ が $F(T_i)$ の点に強収束することを主張する。ここでは, $u_1 \in D$ として共通不動点 $F(T_2) \cap F(T_1)$ に収束する点列の生成を問題とする。石川先生の議論は次の (A) を原点としているように思う。$F(T_1) \cap F(T_2) = F(T_2 T_1)$ という特殊なケースを除けば, (A) は最も素朴な考え方の 1 つであろう。

(A) 任意の $x \in D$ に対して [8] の定理によって, $\{S_1^n x\}$ は T_1 の不動点 $u \in F(T_1)$ に強収束する。D から $F(T_1)$ への写像 P_1 を $P_1 x = u$ とする。$F(T_1) = F(P_1)$ と $P_1(D) = F(P_1)$ はほぼ自明である。u_1 に対して $P_1 u_1 = v_1$ とする。初期点を v_1 として T_2 について $\{S_2^n v_1\}$ を作れば T_2 の不動点 $v \in F(T_2)$ が求まる。この v は T_2 と T_1 の共通不動点に属するのではないか？　あるいは属す様に iteration を改良できないか？

(A) には大きな問題が 2 つあり, 石川先生の議論から次の様な思考過程を想像できる。

(1) P_1 の性質が自明ではない。詳細は不明としても P_1 は非拡大写像でありある種の retraction と考えられる。P_1 の性質自体が興味ある対象であり調査が必要である。P_1 をできあがったものとして iteration に使用することは, 不当とまでは言えないとしてもできる限り避けたい。$P_1 u_1 = v_1$ を得るために既に無限の過程が必要であり, 無限の過程を続けて 2 回行うことになる。しかし, 最初はこの点を棚上げし P_1 を用いて議論する。

(2) 一般の Banach 空間では $F(T_1)$ は凸とは限らない。素朴な (A) の手法で生成した点列は $F(T_1)$ から飛び出す可能性がある。その都度 P_1 で $F(T_1) = F(P_1)$ に戻す次の iteration を考える。$u_1 \in D$, $v_1 = P_1 u_1 \in F(T_1)$ とし

$$u_2 = a_2 T_2 v_1 + (1 - a_2) v_1 \in D, \quad v_2 = P_1 u_2 \in F(T_1) \quad \cdots$$

このとき $\{v_n\}$ は $F(T_1) = F(P_1)$ の点列になる。一般の Banach 空間でも, D が閉集合であれば非拡大写像 T_1 の不動点集合 $F(T_1)$ は閉集合である。したがって, $\{u_n\}$ と $\{v_n\}$ が同一の点 v に収束すれば $v \in F(T_1)$ が保証される。 点列の収束先 v はおそらく共通不動点だろう。$T_2 P_1 = P_1 T_2$ となるケースでは次の関係が成立する。

$$T_2 P_1 x = P_1 T_2 x \in P_1(D) \ \text{ for } \ x \in D \ \Rightarrow \ T_2 P_1(D) = P_1 T_2(D) \subset P_1(D) = F(P_1).$$

(3) iteration で P_1 の使用を避けるためには, P_1 を T_1 で近似しなければならない。

さらりと書いたが (3) の議論は簡単ではない。写像の数が増えれば $\cap_{i=1}^{l} F(T_i)$ への retraction P_l を $T_1, \cdots, T_l$ で近似することになる。この部分の興味深い記述が石川先生の論文には溢れている。石川先生の近似点列は複雑で実効的な iteration とは言い難い (実際には iteration の形をしていないが iteration に書き直せる)。現代の視点で俯瞰すると, 石川先生は, 有限個の可換な非拡大写像族について, Bruck 先生が存在を証明した共通不動点集合への非拡大 retraction を実際に作成して見せたことになる。言い換えると, 石川先生の本質的な貢献は $T_1, \cdots, T_k$ が可換なケースについて共通不動点の存在を構成的に示したことにある。近似法が複雑にならざるを得ない原因は次の 2 つである。

(4) D が convex であっても $F(T)$ が convex かどうかわからない

(5) $T_1T_2 = T_2T_1$ であれば、$P_1T_2 = T_2P_1$ であるが $P_1S_2 = S_2P_1$ が言えない

したがって, Banach 空間 E に狭義凸を仮定するか $S_1S_2 = S_2S_1$ を仮定すればこの複雑さは消える。$T_1T_2 = T_2T_1$ を仮定することと $S_1S_2 = S_2S_1$ を仮定することの間に, 実質的にどの程度の隔たりがあるのか著者は知らない。

石川先生の論文 [9] は, この分野の 1 つのマイルストーンであり, いくつかのサーベイに取り上げられている。しかし, この論文はほとんど読まれていない。Google scholar では, 2012 年現在 20 の引用があり 11 までが鈴木先生である。この石川先生の論文を正面から取り上げた論文を鈴木先生のもの以外に著者は知らない。鈴木先生 [16] は, 25 年後, D 上の可算個の可換な非拡大写像族について共通不動点に収束する点列を構成した。鈴木先生の近似点列は石川先生の近似点列より簡潔であるが, 代償として係数条件がやや複雑である。"石川先生の論文が存在しなければ ([16] の結果と) 似た成果がもっと早く得られていたかもしれない" と鈴木先生は講究録で語っている。しかし, 著者は懐疑的である。石川先生のアイデアは鈴木先生と比べてもより素朴で素直である。石川先生の論文 [9] の有無にかかわらず異なる視点が必要だったのだと思う。

石川先生の論文 [9] を予備知識を持たずに査読することは大変な作業だったのではないかと想像される。事実いくつかの誤記がそのまま残されている。それにも関わらず, 査読者は石川先生の論文の価値を認め, しかも Prof. Linhart の論文 [12] を紹介している。石川先生と Prof. Linhart の先駆的な価値ある仕事が彼によって埋もれずに残った。

Prof. Linhart の論文 (ドイツ語) は, 狭義凸 Banach 空間で可算個の可換な非拡大写像族についての共通不動点への近似を扱っている。主定理の形から (著者は読んでいないが) 難解であろうと想像される。この論文は石川先生の論文以上に読まれていない。Google scholar では 6 つの引用がある。1 つは石川先生であり 5 つが鈴木先生である。

Prof. Kuhfittig [11] によるもう 1 つの論文は比較的に読まれている。これは, 狭義凸 Banach 空間で有限個の非拡大写像族の共通不動点への近似を扱っている。高橋先生 [17] によって同様のアイデアが独立に提案され, 高橋先生・厚芝先生・下地先生等によって研究が進められた; [20] , [25], [14]. 現在 *W-mapping* の名称で知られている。論文 [11] も長い間一般には知られていなかったようである。論文 [11] の引用は 2007 年以降に集中している。埋もれていた Prof. Kuhfittig の論文に誰かが光をあてたものと思われる。この論文を 2000 年以前に引用した文献は, Google scholar では, 1983 年と 1984 年に 3 件を数えるのみである。2 件は書籍と Proceeding で論文誌に掲載されたものは 1 件しかない。ただし宮崎先生 [24] も [11] を引用している。実数は多少増えると思われる。宮崎先生 [24] は早い時期に Prof. Kuhfittig の論文 [11] と石川先生の論文 [8], [9] を考察している。Prof. Kuhfittig は石川先生の論文も Bruck 先生の論文も引用していない。しかし, Kuhfittig の iteration は Ishikawa iteration の一般化と捉えることができる。またこの領域に大きな影響を与えた Bruck 先生の 1970 年代の研究結果からも到達可能と思われる。類似した iteration が独立に提案されたことは不思議ではない。

著者には1つ疑問がある。石川先生とBruck先生のいくつかの議論と手法は類似しているように思われる。彼らはお互いの研究成果を知らなかったのだろうか？

Ishikawa iteration.

著者は, 石川先生の3つの論文 [7], [8], [9] は独立した内容を持つと最初思っていた。しかし, 現在では [9] は [8] の続編であると認識している。また, 石川先生が [7] において何故 Ishikawa iteration を導入したのかという動機もおぼろげながら想像できる。著者は, 3つの論文には共通する問題意識が存在するのではないかと想像する。

石川先生の論文 [7] は Hilbert 空間の compact 凸部分集合上で定義された Lipschitzian pseudo-contractive 自己写像の不動点への近似を扱っている。この族は非拡大写像より広い写像族である。しかし, 石川先生の証明はわかりやすい記述とは言い難く目立つ誤記も存在する。最初に石川先生の議論を整理して提示する; refer to [22]。

L と b を $b < 1/(\sqrt{L^2+1}+1)$ を満たす正の実数とする。 $1/(\sqrt{L^2+1}+1) \in (0, 1/2)$ は明らかである。$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次の条件を満たす数列とする。

$$(1) \quad 0 \le a_n \le b_n \le b, \quad (2) \quad \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \infty$$

D を Hilbert 空間 H の compact 凸集合とする。T を D 上の L–Lipschitzian pseudo-contractive 自己写像とする。すなわち

$$\begin{aligned} &(a)\ \|Tx - Ty\|^2 \le \|x-y\|^2 + \|(I-T)x - (I-T)y\|^2, \\ &(b)\ \|Tx - Ty\| \le L\|x-y\| \qquad\qquad \text{for} \quad x, y \in D. \end{aligned}$$

という関係が成立する。$\{S_n\}$, $\{U_n\}$ を次の様に定義する。

$$S_n = b_n T + (1-b_n)I, \quad U_n = a_n T S_n + (1-a_n)I \qquad \text{for} \quad n \in N$$

$u_1 \in D$ として、$\{u_n\}, \{v_n\}$ を次の様に定義する。

$$v_n = b_n T u_n + (1-b_n)u_n = S_n u_n, \quad u_{n+1} = a_n T S_n u_n + (1-a_n)u_n = U_n u_n.$$

この Ishikawa iteration と呼ばれる手続きで生成された $\{u_n\}$ の収束を議論する。

$d = 1 - 2b - b^2L^2$ とすれば, $n \in N$ について次の関係が成立する。

$$0 = 1 - 2\tfrac{1}{\sqrt{L^2+1}+1} - (\tfrac{1}{\sqrt{L^2+1}+1})^2 L^2 < 1 - 2b - b^2L^2 = d \le 1 - 2b_n - b_n^2 L^2.$$

まず Shauder の定理によって $v \in F(T)$ が存在する。(a) と (b) によって、次の2つの基本的な関係が成立する。$x \in D$, $n \in N$ とすれば

$$\begin{aligned} &(c)\quad \|Tx - v\|^2 = \|Tx - Tv\|^2 \le \|x - v\|^2 + \|x - Tx\|^2, \\ &(d)\quad \|Tu_n - Tv_n\| = \|Tu_n - T(b_n T u_n + (1-b_n)u_n)\| \le b_n L \|u_n - Tu_n\|. \end{aligned}$$

次の基本的事項を lemma とする。

Lemma 3. *H を Hilbert 空間とし $x, y, z \in H$, $c \in R$ とする。次の関係が成立する。*

$$(e)\quad \|cx + (1-c)y - z\|^2 = c\|x-z\|^2 + (1-c)\|y-z\|^2 - c(1-c)\|x-y\|^2.$$

(e) で $cx + (1-c)y$ を $v_n = b_n T u_n + (1-b_n)u_n$ とし z を v とする。(c) より

$$\text{(A)} \qquad \|v_n - v\|^2 \le \|u_n - v\|^2 + b_n^2 \|Tu_n - u_n\|^2$$

を得る。(d) によって (B) は明らかである。

$$\begin{aligned} \text{(B)} \qquad \|Tu_n - Tv_n\|^2 &= \|Tu_n - T(b_n T u_n + (1-b_n)u_n)\|^2 \\ &\le L^2 \|u_n - (b_n T u_n + (1-b_n)u_n)\|^2 \le b_n^2 L^2 \|Tu_n - u_n\|^2. \end{aligned}$$

$(e)(d)$ と $a_n \le b_n$ より (C) も明らかである。

$$\begin{aligned}(\mathrm{C}) \quad \|v_n - Tv_n\|^2 &= \|(b_nTu_n + (1-b_n)u_n) - Tv_n\|^2 \\ &= b_n\|Tu_n - Tv_n\|^2 + (1-b_n)\|u_n - Tv_n\|^2 - b_n(1-b_n)\|Tu_n - u_n\|^2 \\ &\le b_n^3L^2\|Tu_n - u_n\|^2 + (1-a_n)\|u_n - Tv_n\|^2 - b_n(1-b_n)\|Tu_n - u_n\|^2.\end{aligned}$$

よって (A) より (D) が成立する。

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}) \quad \|Tv_n - v\|^2 &\le \|v_n - v\|^2 + \|Tv_n - v_n\|^2 \\ &\le (\|u_n - v\|^2 + b_n^2\|Tu_n - u_n\|^2) \\ &\quad + (b_n^3L^2\|Tu_n - u_n\|^2 + (1-a_n)\|u_n - Tv_n\|^2 - b_n(1-b_n)\|Tu_n - u_n\|^2).\end{aligned}$$

したがって, $d \le 1 - 2b_n - b_n^2L^2$ を考慮すると次の関係を得る。

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}) \quad \|u_{n+1} - v\|^2 &= \|(a_nTv_n + (1-a_n)u_n) - v\|^2 \\ &= a_n\|Tv_n - v\|^2 + (1-a_n)\|u_n - v\|^2 - a_n(1-a_n)\|Tv_n - u_n\|^2 \\ &\le a_n(\|u_n - v\|^2 + b_n^2\|Tu_n - u_n\|^2) \\ &\quad + a_n(b_n^3L^2\|Tu_n - u_n\|^2 + (1-a_n)\|u_n - Tv_n\|^2 - b_n(1-b_n)\|Tu_n - u_n\|^2) \\ &\quad + (1-a_n)\|u_n - v\|^2 - a_n(1-a_n)\|Tv_n - u_n\|^2 \\ &\le \|u_n - v\|^2 - d\,a_nb_n\|Tu_n - u_n\|^2.\end{aligned}$$

この式から $\{\|u_n - v\|^2\}$ は非増加列であり収束する。次の関係も明らかだろう。

$$\sum_{i=1}^{n} da_ib_i\|Tu_i - u_i\|^2 \le \|u_1 - v\|^2 - \|u_{n+1} - v\|^2 < \|u_1 - v\|^2.$$

よって $\sum_{i=1}^{\infty} da_ib_i\|Tu_i - u_i\|^2 < \infty$ を得る。仮定より $\sum_{i=1}^{\infty} da_ib_i = \infty$ であるから, $\liminf_n \|Tu_n - u_n\|^2 = 0$ である。D は compact より, $\{u_n\}$ は $\lim_j \|Tu_{n_j} - u_{n_j}\| = 0$ を満たしある $u \in D$ に収束する部分列 $\{u_{n_j}\}$ を持つ。次の不等式が成立する。

$$\|Tu - u\| \le \|Tu - Tu_{n_j}\| + \|Tu_{n_j} - u_{n_j}\| + \|u_{n_j} - u\|.$$

当然 $\lim_j \|u_{n_j} - u\| = 0$ であり T は連続であるから $u \in F(T)$ を得る。(E) を得るまでの議論は v を u に変えても有効である。したがって, $\{\|u_n - u\|\}$ は非増加収束列であり, 0 に収束する部分列 $\{\|u_{n_j} - u\|\}$ を持つ。これは $\{\|u_n - u\|\}$ も 0 に収束することを意味する。よって $\{u_n\}$ は $u \in F(T)$ に収束する。

Theorem 4 (Ishikawa,1974, [7]). $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次の条件を満たす実数列とする。

$$(1) \quad 0 \le a_n \le b_n \le 1, \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n = \infty, \quad (3) \quad \lim_n b_n = 0.$$

D を *Hilbert* 空間 H の *compact* 凸集合とし T を D 上の *Lipschitzian pseudo-contractive* 自己写像とする。$u_1 \in D$ として $\{u_n\}$ を次の様に定義する。

$$u_{n+1} = a_nT(b_nTu_n + (1-b_n)u_n) + (1-a_n)u_n \qquad \text{for} \quad n \in N$$

このとき、$\{u_n\}$ は T の不動点に強収束する。

Theorem 4 は石川先生によって 1974 年に提示された。ここまでに, 原論文より相当に整理された議論をより緩い条件の下で示した。しかし, 大筋は石川先生の議論をほぼ忠実になぞっている。つまり, 石川先生の証明は Theorem 4 以上の内容を含んでいる。石川先生の議論において, 誰もが最初に考える疑問は "なぜ Mann iteration ではなく Ishikawa iteration なのか" だと想像される。この点については少しだけ後述する。

Control 係数の条件 (3) は, T をリプシッツ写像としながらリプシッツ定数 L の評価がまったく反映されていない。現実の問題としてリプシッツ定数 L の評価がまったくでき

ないことがあるのだろうか？ 評価ができないとすれば何をもってリプシッツ写像と判断するのだろうか？本稿の議論から, L の大きさ (上限) を相当のロスがあるとしても見積もることができれば, $\{b_n\}$ は 0 に収束する必要はなく, 前述した b より小さければ充分である。また $\{b_n\}$ が (3) を満たせば, ある番号からは b より小さくなる。

定理の仮定では, T は D 上の Lipschitzian pseudo-contractive 自己写像である。これは条件 $(a)(b)$ を満たすことを意味する。しかし, 石川先生の証明 (本稿の証明) を読めば定理の証明に実際に使用されている条件は T の連続性及び $(c)(d)$ であることが誰にでも理解できる。不動点が存在すれば, $(c)(d)$ は石川先生の条件 $(a)(b)$ より真に弱い条件であることが分る。また T が連続ならば不動点が存在することは Shauder の定理より明らかである。次の 2 つの条件を満たす連続写像を考える; Kubota–Takeuchi [23] を参照。

$$(4) \quad \|Tx - v\|^2 \le \|x - v\|^2 + \|x - Tx\|^2 \qquad \text{for} \quad x \in D,\ v \in F(T),$$
$$(5) \quad \|Tx - T(cTx + (1-c)x)\| \le cL\|x - Tx\| \qquad \text{for} \quad x \in D,\ c \in [0,1].$$

この写像が条件 $(c)(d)$ を満たすことは自明である。また Lipschitzian pseudo-contraction T は明らかに (4)(5) を満たす。したがって, T の条件はここまで緩めることができる。不動点の存在を仮定すれば, 条件 (4) を満たす写像族は hemi–contractive と呼ばれ pseudo–contractive より広い概念となる。条件 (5) を満たす連続な自己写像 T で Lipschitzian ではない例も容易に作成できるが定理の係数条件との関係は非常に微妙である。条件 (5) を見ると, 左辺の T が右辺では 2 つキャンセルされている。(d) に戻して考えると, 左辺の $\|Tu_n - TS_nu_n\|$ から S_n も右辺では消えて $\|u_n - Tu_n\|$ となっている。これは Mann iteration とリプシッツ写像などが競合した時に現れる特徴である。ここでの議論には (e) が本質的な役割を果たしている。このため同様の議論を行うには空間の条件が大きく制限されると想像される。現在, 私たちは次の関係が成立することを知っている。

$$\begin{aligned} &F(T) = F(S_n) \subset F(TS_n) = F(U_n), \\ &F(TS_n) \cap F(S_n) = F(TS_n) \cap F(T) = F(T) \qquad \text{for} \quad n \in N. \end{aligned}$$

Ishikawa iteration は本稿では次の様に記述されている。

$$(*) \qquad u_1 \in D, \quad u_{n+1} = a_n TS_n u_n + (1 - a_n)u_n \qquad \text{for} \quad n \in N.$$

これは写像族 $\{TS_n\}$ についての Mann iteration である。石川先生の証明では TS_nu_n は Tv_n と書かれている。非拡大写像の議論とのアナロジーを追えば、Iteration $(*)$ によって期待されるのは, $\{u_n\}$ が $\cap_n F(TS_n)$ の点 u に収束することである。$v \in F(T) \subset \cap_n F(TS_n)$ とする。TS_n が非拡大の場合, 証明の要点は次の関係を導くことである。

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - v\|^2 &= a_n\|TS_nu_n - v\|^2 + (1-a_n)\|u_n - v\|^2 - a_n(1-a_n)\|TS_nu_n - u_n\|^2 \\ &\le \|u_n - v\|^2 - a_n(1-a_n)\|TS_nu_n - u_n\|^2 \le \|u_n - v\|^2. \end{aligned}$$

しかし, 石川先生の証明の中に $\{u_n\}$ が $u \in \cap_n F(TS_n)$ に収束することの直接の記述を見つけることはできない。石川先生の証明の要点は次の関係を導くことである。

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - v\|^2 &= \|a_n(TS_nu_n - v) + (1-a_n)(u_n - v)\|^2 \\ &= a_n\|TS_nu_n - v\|^2 + (1-a_n)\|u_n - v\|^2 - a_n(1-a_n)\|TS_nu_n - u_n\|^2 \\ &\cdots \\ &\le \|u_n - v\|^2 - da_nb_n\|Tu_n - u_n\|^2 \le \|u_n - v\|^2. \end{aligned}$$

本稿の証明の中で (E) がこの関係を記述し, (A)(B)(C) 及び (D) が点線部分を埋める関係とその計算である。最後の行から S_n が消えていることに注意されたい。石川先生の証明は $\{u_n\}$ が $(\cap_n F(TS_n)) \cap F(T) = F(T)$ の点に収束することを直接示す。

このようなことを可能にする技術的な理由の根源は明らかに条件 (5) にある。技術的と書いたのは, 石川先生が Ishikawa iteration を導入した理由を著者は充分には理解できていないからである。条件 (5) は $\|Tu_n - TS_nu_n\|$ を $\|u_n - Tu_n\|$ という S_n を除いた式で評価できることを意味する。技術的には, 条件 (4) も条件 (5) と協働して S_n を消去する働きをする。(A) は, (4)(5) によって, $\|S_nu_n - v\|^2$ が $\|u_n - v\|^2$ と $\|Tu_n - u_n\|^2$ で評価できることを意味する。また (B) は, (4)(5) によって, $\|S_nu_n - Tv_n\|^2$ が $\|Tu_n - u_n\|^2$ と $\|u_n - TS_nu_n\|^2$ で評価できることを意味する。整理すると, (4)(5) によって, $\|u_n - TS_nu_n\|^2$ 以外の項からは S_n を消去できることになる。残された問題は $\|u_n - TS_nu_n\|^2$ だけである。しかし, control 係数を調節し仮定の様に $a_n \le b_n$ としておけば $\|u_n - TS_nu_n\|^2$ を含む項の効果を無効化できる。具体的には, $a_n \le b_n$ を利用して式変形の中で $\|u_n - TS_nu_n\|^2$ を含む項自体を消去できる; (C) の式変形を参照。

現在の視点では, 石川先生は $v \in F(T)$ が U_n の吸引点集合 $A(U_n)$ の点であることを実質的に示した; refer to Takahashi–Takeuchi [26]。ここから $F(T) = F(U_n) \subset A(U_n)$ に至るのは数歩である。伝統的な言い方をすれば, 石川先生は Lipschitzian hemi–contractive mapping T から $F(T) = F(U_n)$ を満たす continuous quasi–nonexpansive mapping U_n を実質的に作った; see [22]。また $v \in F(T)$ として $\{\|U_nu_n - v\|\}$ が収束すれば $\{\|Tu_n - u_n\|\}$ が 0 に収束する。石川先生の認識は不明であるが, これが Ishikawa iteration で問題が解決できる理由である。この見方を徹底すれば, 証明の構造の更に深い理解が可能であり見やすい証明を得られるが今回は踏み込まない。ごく自然な発想で, Chidume and Mutangadura [21] は 2 次元ユークリッド空間の閉球上に石川先生の条件をみたす 1 つの自己写像 T を作成し, Mann iteration では不動点へ収束しないことを示した。1 次元でも初期点と係数によっては収束しない簡単な例を作成できるがこの点も踏み込まない。

石川先生は, 可換な非拡大写像の有限族について, その共通不動点への収束列を論文 [9] で考察した。論文 [8] はこの序章と位置付けられる。論文 [7] では Ishikawa iteration を導入し所与の問題が解決できることを示した。著者はこの iteration を導入した動機や思考過程を充分には理解していない。技術的でおぼろげな理解によって勝手な判断をすれば, 石川先生は, 特殊な条件 (4)(5) の下で, 所与の問題を共通不動点集合 $(\cap_n F(TS_n)) \cap F(T)$ の要素への近似列を求める問題と捉えたのではないだろうか？ この様に考えたとき初めて条件 $\lim_n b_n = 0$ の意味が了解できる。この想像が幾ばくかの真実を含むとすれば, 石川先生の意識は論文 [7] から一貫して共通不動点に向けられていたことになる。

この節で参照した新たな文献を追加する。

References

[20] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive mappings and applications*, Indian J. Math. **41** (1999), 435–453.

[21] C.E. Chidume and S.A. Mutangadura, *An example of the Mann iteration method for Lipschitz pseudocontractions*, Proc. Am. Math. Soc. **129** (8) (2001) 2359-2363.

[22] S. Iemoto, R. Kubota and Y. Takaeuchi, *Around Ishikawa's theorem in* 1974, In preparation.

[23] R. Kubota and Y. Takaeuchi, *On Ishikawa's storong convergence theorem*, Proceedings of the 3th Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (Matsue, Japan, 2012), 175–195

[24] K. Miyazaki, *Iteration methods for common fixed points of nonexpansive mappings*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **59** (1983), 75–78.

[25] W. Takahashi and K. Shimoji, *Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems*, Math. Comput. Modelling **32** (2000), 1463–1471.

[26] W. Takahashi and Y. Takeuchi, *Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **12** (2011), 399–406.